Title	部分群の作る束が上半もぢゅらナル有限群
Author(s)	佐藤, 正治
Citation	全国紙上数学談話会. 2(5) p.128-p.130
Issue Date	1947-06-10
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75186
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

51. 部分群の作る束が上半もぢゅらなる有限群

阪大　佐藤正次

有限群 $\mathfrak{G}$ の部分群全部の作る束 $L(\mathfrak{G})$ が modular なる場合を岩澤氏[1]が決定して居られますが、此の場合 $\mathfrak{G}$ を特徴づける本質的な事柄は大部分 $L(\mathfrak{G})$ が上半もぢゅら束は ausgeglich なる事及び一般の有限群に於て部分群 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ が $[\mathfrak{A}]=a$, $[\mathfrak{B}]=b$ $(a,b)=1$ (但、[ ] ハ位数を示す) とすれば $[\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}] \geqq ab$, $ab \mid [\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}]$ なる事、及 nilpotent な有限群は常に、下半もちゅらなる事、を用ふるならば岩澤氏の論文の Hilfssatz 3 — 10 が殆ど同じ形で上半もぢゅら群（この様に略称します）について成立する事が分ります。

但 Hilfssatz 8. の証明は少し複雑になります方針は上論文と同様です。Hilfssatz 10. は次の様に変形しないと成立しません。

"$\mathfrak{G}$ を上半もぢゅら群 $[\mathfrak{G}]=p^\alpha q^\beta$, $p>q$, p, q は素数とし二つの q-Sylow 群 $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ があれば $P\in\mathfrak{G}$, $P^p=1$ $P\mathfrak{Q}_1P^{-1}=\mathfrak{Q}_2$ なる元 P が存在する" 即ち $[\mathfrak{G}]$ が二種類の素数の積なる事が必要です。此れが Hilfssatz 11, 13 の成立しない原因になります。

以上により次の定理が成立します。

定理 1. $[\mathfrak{G}]=p^\alpha q^\beta$ $p>q$ p, q は素数なる non-nilpotent な群 $\mathfrak{G}$ は次の條件を満足する時且その時に限り、上半もぢゅらである。

1). p-Sylow 群は elementary Abelean : $(p,\cdots,p)$型 $\mathfrak{P}$ と書く

2). q-Sylow 群は cyclic $\mathfrak{Q}=\{Q\}$.

3). 任意の $P\in\mathfrak{P}$ に対し

$$QPQ^{-1}=P^r\ ;\quad r \text{ は } \mathfrak{G} \text{ のみにより（}Q\text{ を固定すれば）}$$

一意的に定まる常数で $r \not\equiv 1 \mod p$, $r^{q^{\beta'}} \equiv 1 \mod p$.
但 $1 \leqq \beta' \leqq \beta$. β' は $\mathfrak{G}$ のみで定まる. 勿論上の合同式を満足する最小のものを β' とするのである. 特に $\beta' = 1$ なる時 $L(\mathfrak{G})$ は 下半もぢゅら 従って $\mathfrak{G}$ は M-群 になります.

注意 $\mathfrak{G}$ の q-Sylow 群の 二つの mean の内で maximal な位数を持つものは, 全ての q-Sylow 群に共通で 位数は $q^{\beta-\beta'}$.

一般の位数を持つ群が 上半もぢゅら なる時に直積に分解するには岩澤氏の論文の Hilfssatz 12 に対応するものだけが成立します. 証明は全く同様です. 即ち "$\mathfrak{G}$ を 上半もぢゅら $[\mathfrak{G}] = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}$ $p_1 > p_2 > p_3$ 素数, $\mathfrak{P}_i$ を p_i-Sylow 群 とする時 若し $\mathfrak{P}_1 \smile \mathfrak{P}_2$ が non-nilpotent ならば $\mathfrak{P}_1 \smile \mathfrak{P}_3$ 及 $\mathfrak{P}_2 \smile \mathfrak{P}_3$ は共に nilpotent になる" 此れを用ひて任意の位数の上半もぢゅら群 $\mathfrak{G}$ を直積に分解すれば 其の直既約な non nilpotent な因子は.

$(\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \cdots\cdots \times \mathfrak{P}_r) \smile \mathfrak{Q}$ (こゝで $\mathfrak{P}_i$, $\mathfrak{Q}$ は $\mathfrak{G}$ の p_i-Sylow 群. q-Sylow 群である) なる型で $\mathfrak{P}_i \smile \mathfrak{Q}$ は全て定理 1 に与へられた構造を有する事は直ちに解ります.

扨上の如き構造の位数が $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots\cdots p_r^{\alpha_r} q^{\beta}$ ・ $p_1 > p_2 > p_3 > \cdots > p_r > q$. なる群が 上半もぢゅら. なる為の必要充分な條件は各 $\mathfrak{P}_i \smile \mathfrak{Q}$ に於て定理 1 に於る $r_i^{q^{\beta_i'}} \equiv 1 \mod p_i$・$1 \leqq \beta_i' \leqq \beta$ を与へる. β_i' について $\beta_i' \neq \beta_j'$ $(i \neq j)$ が成立する事である. 証明は容易ですが 長くなりますから略します.

以上により 上半もぢゅら な有限群は 完全に決定されました. 即ち

定理 2. 有限群 $\mathfrak{G}$ が 上半もぢゅら なる為の完全條件は, 次の様な様な構造を有する事である.
$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots\cdots \times \mathfrak{A}_{\nu} \times \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 \times \cdots\cdots \times \mathfrak{R}_s$ 各因子の位数は互に素 こゝで
$\mathfrak{R}_i$ は r_i-Sylow 群 ($\mathfrak{G}$ の) で上半もぢゅら 即ち もぢゅら なるもの [岩澤氏の論文参照]
$\mathfrak{A}_i$ は下の様な構造を有す. 代表的に $\mathfrak{A}$ と書いて
$\mathfrak{A}_i = (\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \cdots\cdots \times \mathfrak{P}_j) \smile \mathfrak{Q}$ $[\mathfrak{A}] = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots\cdots p_j^{\alpha_j} q^{\beta}$ $p_i > q$ $i = 1, \cdots j$.
$p_i \neq p_{i'}$ $(i \neq i')$ $\mathfrak{P}_i$, $i = 1, \cdots, j$. $\mathfrak{Q}$ は全て $\mathfrak{G}$ の Sylow 群で

1). $\mathfrak{P}_i$ は全て elementary abelean

2). $\mathfrak{Q}$ は cyclic $= \{Q\}$.

3). $\mathfrak{P}_i \cup \mathfrak{Q}$ は全て non-nilpotent で

任意の $P_i \in \mathfrak{P}_i$ に対し $QP_iQ^{-1} = P_i^{r_i}$. なる r_i は $\mathfrak{G}$ 及 i

のみに（Q を固定すれば）depend する常数で $r_i \not\equiv 1 \bmod p_i$

$r_i^{q^{\beta_i'}} \equiv 1 \bmod p_i \quad 1 \leqq \beta_i' \leqq \beta$

但 β_i' は r_i に対して上の如き関係の成立する最小のものとする

4). $\beta'_m \neq \beta'_n \quad (m \neq n)$

註1. — 岩澤氏：Über die endlichen Gruppen u. die Verbände ihrer Untergruppen 東大理科報告 1941.

（1947. 5. 7）